SESSION 2003

Filière PC

MATHÉMATIQUES

Épreuve commune aux ENS de Paris, Lyon et Cachan

Durée : 4 heures

L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.

Tournez la page S.V.P.

Les définitions importantes sont signalées par un signe $\rightsquigarrow$. Les résultats admis sont encadrés par des • . Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et tout entier naturel k, on note simplement $\mathcal{C}^k(I) = \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et à valeurs réelles. L'espace des fonctions continues, $\mathcal{C}^0(I)$, est noté $\mathcal{C}(I)$. Si I est un intervalle fermé $[a, b]$, on note de plus $\mathcal{C}_0(I)$ l'espace des fonctions continues sur I s'annulant en a et en b, et $\mathcal{C}_0^k(I)$ l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, nulles en a et en b ainsi que toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre k. De façon analogue, $\mathcal{C}_0^k(\mathbb{R})$ désigne l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ admettant des limites nulles en $-\infty$ et $+\infty$, ainsi que toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre k.

Dans tout le problème, E est une fonction à valeurs réelles de deux variables réelles, notées q et p, et E est supposée au moins de classe $\mathcal{C}^3$, c'est-à-dire $E \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. Les dérivées partielles premières de E sont ainsi notées

$$\frac{\partial E}{\partial q}(q,p) \quad \text{et} \quad \frac{\partial E}{\partial p}(q,p)\,,$$

et les dérivées partielles secondes de E

$$\frac{\partial^2 E}{\partial q^2}(q,p)\,, \quad \frac{\partial^2 E}{\partial q \partial p}(q,p) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 E}{\partial p^2}(q,p)\,.$$

Le problème concerne la minimisation de l'intégrale

$$\int_I E(\rho(x), \rho'(x))\, dx$$

pour ρ appartenant à un ensemble $\mathcal{A}$ de fonctions admissibles à préciser (inclus dans $\mathcal{C}^1(I)$).

I Résultats préliminaires

1 Un lemme fondamental

Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$, et

$$\mathcal{B} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{C}^1([a,b]) \cap \mathcal{C}_0([a,b]) = \{\, h \in \mathcal{C}^1([a,b])\,;\, h(a) = h(b) = 0 \,\}\,.$$

i)

Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}([a,b])$ telles que, pour tout $h \in \mathcal{B}$,

$$\int_a^b f(x)\, h'(x)\, dx \;=\; 0\,.$$

Indication : On pourra utiliser des fonctions h de la forme

$$h(x) \;=\; \int_a^x (\, f(x) \,-\, c\,)\, dx$$

ii)

Déterminer, en utilisant i), l'ensemble des couples $(f,g) \in \mathcal{C}([a,b]) \times \mathcal{C}([a,b])$ tels que, pour tout $h \in \mathcal{B}$,

$$\int_a^b (\, f(x)\, h(x) \,+\, g(x)\, h'(x)\,)\, dx \;=\; 0\,.$$

Parmi ces couples, peut-on avoir $g(x) = |\, x \,-\, (a+b)/2\,|$?

2 Mesure des courbes et surfaces

i)

On considère un arc de courbe défini par une équation cartésienne,

$$\Gamma \;=\; \{\, (x, \varphi(x))\,;\, x \in [a,b]\,\}\,,$$

avec $a < b$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1([a,b])$. Quelle est la longueur de l'arc Γ ?

ii)

Soient $\alpha \in]0, 2\pi[$ et $R > r > 0$. Quelle est l'aire de

$$S \;=\; \{\, (\rho\cos\omega, \rho\sin\omega)\,;\, r \le \rho \le R \;\text{ et }\; 0 \le \omega \le \alpha\,\} \quad ?$$

iii)

On suppose que l'arc Γ défini en i) ne coupe pas l'axe Ox et on considère Σ la surface de révolution obtenue par rotation de Γ autour de cet axe.

• On admet que l'aire de Σ est égale à

$$A \;=\; 2\,\pi \int_a^b \varphi(x)\, \sqrt{1 + \varphi'(x)^2}\, dx \qquad \bullet$$

Vérifier cette formule dans le cas où Γ est un segment de droite. On pourra s'aider d'un dessin, et utiliser ii).

Tournez la page S.V.P.

3 Méthode de séparation des variables

Soient I et J des intervalles de $\mathbb{R}$. On suppose que $G \in \mathcal{C}^1(J)$ ne s'annule pas. Soient $a \in I$, $\alpha \in J$, et $\rho \in \mathcal{C}^1(I, J)$ telle que $\rho(a) = \alpha$ et

$$\rho'(x) = G(\rho(x))$$

pour tout $x \in I$. Calculer

$$\int_\alpha^{\rho(x)} \frac{\mathrm{d}r}{G(r)}.$$

II Minimisation sur un intervalle I borné

Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$. Comme dans la partie I, on notera

$$\mathcal{B} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{C}^1([a,b]) \cap \mathcal{C}_0([a,b])\,.$$

À toute fonction $\rho \in \mathcal{C}^1([a,b])$ on associe le nombre réel

$$\mathcal{E}[\rho] = \int_a^b E(\rho(x), \rho'(x))\,dx\,.$$

1

Soient ρ et $h \in \mathcal{C}^1([a,b])$. On considère $e_{\rho,h}$, la fonction d'une variable réelle t définie par

$$e_{\rho,h}(t) = \mathcal{E}[\rho + t\,h]\,.$$

Montrer que $e_{\rho,h} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et exprimer ses dérivées en 0

$$\frac{\mathrm{d}e_{\rho,h}}{\mathrm{d}t}(0) \text{ et } \frac{\mathrm{d}^2 e_{\rho,h}}{\mathrm{d}t^2}(0)$$

à l'aide de ρ, ρ', h, h' et des dérivées partielles de E.

2

Soient α et $\beta \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $\rho \in \mathcal{C}^1([a,b])$ tel que $\rho(a) = \alpha$, $\rho(b) = \beta$, réalisant le minimum de $\mathcal{E}[\rho]$ sous cette contrainte, c'est-à-dire :

$$\mathcal{E}[\rho] = \min_{\eta \in \mathcal{A}} \mathcal{E}[\eta]\,, \qquad \text{où } \mathcal{A} \stackrel{\text{déf}}{=} \{\,\eta \in \mathcal{C}^1([a,b])\,;\ \eta(a) = \alpha,\ \eta(b) = \beta\,\}\,. \tag{1}$$

i)

Soit $h \in \mathcal{B}$. Quelle est alors la valeur de

$$\frac{\mathrm{d}e_{\rho,h}}{\mathrm{d}t}(0) \quad ?$$

ii)

Déduire de ce qui précède que la fonction

$$x \in [a,b] \mapsto \frac{\partial E}{\partial p}(\rho(x), \rho'(x))$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial E}{\partial p}(\rho(x), \rho'(x))\right) = \frac{\partial E}{\partial q}(\rho(x), \rho'(x)) \tag{2}$$

pour tout $x \in [a,b]$.

$\rightsquigarrow$ Désormais, on appelle **extrémale** de $\mathcal{E}$ toute fonction $\rho \in \mathcal{A}$, au moins de classe $\mathcal{C}^2$, telle que l'équation (2) soit satisfaite pour tout $x \in [a,b]$.

iii)

Soit ρ une extrémale de $\mathcal{E}$. Calculer

$$E(\rho(b),\rho'(b)) \;-\; \rho'(b)\,\frac{\partial E}{\partial p}(\rho(b),\rho'(b)) \;-\; E(\rho(a),\rho'(a)) \;+\; \rho'(a)\,\frac{\partial E}{\partial p}(\rho(a),\rho'(a))\,.$$

3

On se place dans le même cadre qu'à la question **2** ci-dessus, en supposant que (1) a lieu pour ρ de classe $\mathcal{C}^2$.

i)

Soit $h \in \mathcal{B}$. Quel est le signe de

$$\frac{\mathrm{d}^2 e_{\rho,h}}{\mathrm{d}t^2}(0) \quad ?$$

ii)

Déduire de ce qui précède que, pour tout $h \in \mathcal{C}^1([a,b]) \cap \mathcal{C}_0([a,b])$:

$$\int_a^b \left(P(x)\,h'(x)^2 \,+\, Q(x)\,h(x)^2\right)\,dx \;\geq\; 0\,, \tag{3}$$

avec

$$P(x) \;=\; \frac{\partial^2 E}{\partial p^2}(\rho(x),\rho'(x))\,, \quad Q(x) \;=\; \frac{\partial^2 E}{\partial q^2}(\rho(x),\rho'(x)) \;-\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial q \partial p}(\rho(x),\rho'(x))\right)\,. \tag{4}$$

A quelle(s) classe(s) $\mathcal{C}^k$ appartiennent P et Q? On notera par la suite

$$\mathcal{Q}[h] \;=\; \int_a^b \left(P(x)\,h'(x)^2 \,+\, Q(x)\,h(x)^2\right)\,dx\,.$$

4 Exemples

i)

Dans cette question, on considère la fonction $E(q,p) = \sqrt{1+p^2}$. A quoi correspond, en langage commun, le problème de minimisation de $\mathcal{E}$? Trouver toutes les fonctions ρ satisfaisant l'équation (2). Montrer qu'il en existe une et une seule appartenant à l'ensemble $\mathcal{A}$ et l'expliciter. Pour cette solution et les fonctions P, Q définies par (4), l'inégalité (3) est-elle satisfaite?

ii)

Dans cette question, on considère la fonction $E(q,p) = q\sqrt{1+p^2}$. A quoi correspond le problème de minimisation de $\mathcal{E}$? Montrer que, si ρ satisfait (2), il existe une constante C telle que

$$\rho'(x)^2 \;=\; \frac{\rho(x)^2 - C^2}{C^2}\,. \tag{5}$$

Supposons $C^2 < \alpha < \beta$. Montrer, en utilisant la méthode de séparation de variables de la question I.**3**, que la recherche de fonctions $\rho \in \mathcal{A}$, strictement croissantes et satisfaisant (5) sur $[a,b]$, se ramène au calcul de la primitive d'une fonction que l'on explicitera.

NB : le calcul de la primitive n'est pas demandé.

Tournez la page S.V.P.

5 Étude de $\mathcal{Q}[h]$

On cherche ici des conditions sur les fonctions P et Q assurant l'inégalité (3) c'est-à-dire, avec la notation introduite à la question 3.ii),

$$\mathcal{Q}[h] \geq 0 \quad \text{quel que soit } h \in \mathcal{C}^1([a,b]) \cap \mathcal{C}_0([a,b])\,. \tag{6}$$

i)

Montrer que (6) implique

$$P(x) \geq 0 \quad \text{pour tout } x \in [a,b]\,. \tag{7}$$

Indication : on pourra construire une famille de fonctions auxiliaires $g_\varepsilon \in \mathcal{C}_0^1([-\varepsilon,\varepsilon])$, où $\varepsilon > 0$ est un paramètre destiné à tendre vers 0, telles que

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} g_\varepsilon(x)^2\,dx \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} g_\varepsilon'(x)^2\,dx \geq \frac{C}{\varepsilon}\,,$$

pour un certain $C > 0$ indépendant de ε.

ii)

Supposons qu'il existe une fonction $w \in \mathcal{C}^1([a,b])$ satisfaisant

$$P(x)\,(\,Q(x) + w'(x)\,) = w(x)^2 \tag{8}$$

pour tout $x \in [a,b]$. A-t-on alors (6) ? (On pourra interpréter (8) comme l'annulation du discriminant d'une forme quadratique.)

iii) Étude de l'équation (8)

On suppose ici

$$P(x) > 0 \quad \text{pour tout } x \in [a,b]\,.$$

Étant donné $w \in \mathcal{C}^1([a,b])$, une solution u de l'équation différentielle du premier ordre

$$P\,u' + w\,u = 0$$

peut-elle s'annuler? Si une telle solution u est de classe $\mathcal{C}^2$, exprimer $(Pu')'$ sans utiliser u'.

On suppose qu'il existe une solution v de classe $\mathcal{C}^2$ de l'équation différentielle du second ordre

$$-\,(P\,v')' + Q\,v = 0 \tag{9}$$

ne s'annulant pas sur $[a,b]$. Construire alors $w \in \mathcal{C}^1([a,b])$ vérifiant (8) pour tout $x \in [a,b]$.

III Minimisation sur un intervalle I infini

Dans toute cette partie, la fonction E est choisie de la forme

$$E(q,p) = F(q) + \frac{1}{2}\,K(q)\,p^2\,, \tag{10}$$

où les fonctions F et $K \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$ satisfont les propriétés supplémentaires

$$K(q) \geq K_0 > 0 \quad \text{pour tout } q \in \mathbb{R}\,, \tag{11}$$

$$\begin{cases} F(q) > 0 \quad \text{pour tout } q \in \mathbb{R}\backslash\{\alpha,\beta\}\,, \\ F(\alpha) = F(\beta) = 0\,, \quad \dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}q}(\alpha) = \dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}q}(\beta) = 0\,, \\ \dfrac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}q^2}(\alpha) > 0 \quad \text{et} \quad \dfrac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}q^2}(\beta) > 0\,. \end{cases} \tag{12}$$

On suppose pour fixer les idées $\alpha < \beta$.

1 Préambule

i)

Montrer qu'il existe une unique fonction polynomiale de degré 4 et de coefficient dominant 1 satisfaisant (12).

ii)

Pour tout nombre $\theta > 0$, on définit $\mathcal{A}^k_\theta(\mathbb{R})$ comme l'ensemble des fonctions $\rho \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ telles que

$$\begin{cases} \rho(x) - \alpha = \mathcal{O}(\mathrm{e}^{\theta x}) & \text{et, pour tout } m \leq k\,, \quad \rho^{(m)}(x) = \mathcal{O}(\mathrm{e}^{\theta x}) \quad \text{lorsque } x \to -\infty\,, \\ \rho(x) - \beta = \mathcal{O}(\mathrm{e}^{-\theta x}) & \text{et, pour tout } m \leq k\,, \quad \rho^{(m)}(x) = \mathcal{O}(\mathrm{e}^{-\theta x}) \quad \text{lorsque } x \to +\infty\,. \end{cases} \tag{13}$$

Montrer que, si $\rho \in \mathcal{A}^1_\theta(\mathbb{R})$, alors la fonction $x \mapsto E(\rho(x), \rho'(x))$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Dans ce cas on définit

$$\mathcal{E}[\rho] = \int_{-\infty}^{\infty} E(\rho(x), \rho'(x))\, dx\,.$$

$\rightsquigarrow$ Par extension de la définition donnée à la question II.2.ii), on appelle extrémale de $\mathcal{E}$ une fonction ρ appartenant à $\mathcal{A}^2_\theta(\mathbb{R})$ pour au moins un nombre $\theta > 0$ et satisfaisant (2) pour tout $x \in \mathbb{R}$.

iii)

Montrer que pour toute extrémale de $\mathcal{E}$, on a

$$\frac{1}{2} K(\rho(x))\, \rho'(x)^2 \;=\; F(\rho(x)) \tag{14}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2 Étude de l'équation (14)

i) Exemple

On suppose dans cette question que K est la fonction constante égale à K_0 et F est la fonction polynomiale de la question 1.i) ci-dessus. En s'inspirant de la méthode de séparation de variables de la question I.3, calculer ρ satisfaisant (14) et

$$\lim_{x \to -\infty} \rho(x) = \alpha \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \rho(x) = \beta\,.$$

Déterminer les couples (θ, k) pour lesquels $\rho \in \mathcal{A}^k_\theta(\mathbb{R})$.

ii)

On revient au cas général. Montrer qu'il existe une fonction $G \in \mathcal{C}^2([\alpha, \beta], \mathbb{R}^+)$ telle que

$$G(q)^2 = \frac{2\,F(q)}{K(q)}$$

pour tout $q \in [\alpha, \beta]$. Montrer de plus que

$$\begin{cases} G(q) > 0 \quad \text{pour tout } q \in]\alpha, \beta[\,, \\ G(\alpha) = G(\beta) = 0\,, \\ \dfrac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}q}(\alpha) > 0 \quad \text{et} \quad \dfrac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}q}(\beta) < 0\,. \end{cases} \tag{15}$$

Tournez la page S.V.P.

• On admettra que (15) suffit pour construire $\rho \in \mathcal{A}^1_\theta(\mathbb{R})$ tel que

$$\begin{cases} \rho'(x) = G(\rho(x)) & \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \\ \rho(0) = \rho_0\,, \end{cases}$$

avec

$$\theta < \min\left(\frac{dG}{dq}(\alpha)\,, -\frac{dG}{dq}(\beta)\right)\,,$$

quel que soit $\rho_0 \in]\alpha, \beta[$. •

À quels $\mathcal{A}^k_\theta(\mathbb{R})$ appartient cette fonction ρ ?

3

Désormais, ρ désigne une solution croissante de (14), construite grâce à la question 2.ii) ci-dessus. On associe à ρ les fonctions P et Q comme dans la partie II, par les formules (4).

i)

Exprimer les fonctions P et Q à l'aide des fonctions K, F et ρ. Montrer que P et Q sont bornées sur $\mathbb{R}$, et que

$$P(x) \geq K_0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}\,.$$

ii)

Montrer que la fonction $v = \rho'$ est solution de l'équation différentielle (9) sur $\mathbb{R}$.

iii)

Montrer qu'il existe C_1 et $C_2 > 0$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left| K(\rho(x))\,\frac{\rho''(x)}{\rho'(x)} \right| \leq C_1 \quad \text{et} \quad \left| \frac{d}{dx}\left(K(\rho(x))\,\frac{\rho''(x)}{\rho'(x)}\right) \right| \leq C_2\,.$$

iv)

Soit $\omega > 0$. En s'inspirant des questions II.5.ii) et II.5.iii), montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(P(x)\,h'(x)^2 + Q(x)\,h(x)^2\right)\,dx \geq 0$$

pour tout $h \in \mathcal{C}^1_0(\mathbb{R})$ tel que

$$\begin{cases} h(x) = \mathcal{O}(e^{\omega x}) & \text{et} \quad h'(x) = \mathcal{O}(e^{\omega x}) \quad \text{lorsque } x \to -\infty\,, \\ h(x) = \mathcal{O}(e^{-\omega x}) & \text{et} \quad h'(x) = \mathcal{O}(e^{-\omega x}) \quad \text{lorsque } x \to +\infty\,, \end{cases}$$